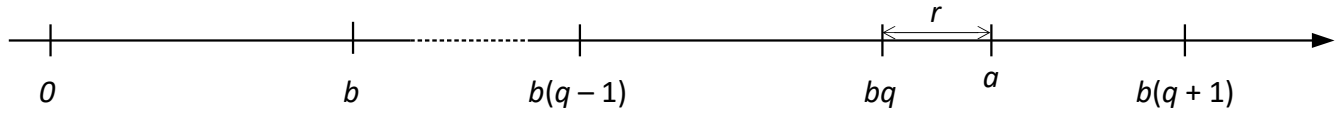


01-02 La division euclidienne

Théorème et définitions

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

Il existe un unique couple $(q ; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ vérifiant $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$.



Les entiers q et r sont respectivement le **quotient** et le **reste** de la **division euclidienne de a par b** .

Exemples

- Division euclidienne de 50 par 11 : $50 = 11 \times 4 + 6$
Ce n'est pas la division euclidienne de 50 par 4.
- Division euclidienne de 50 par 6 : $50 = 6 \times 8 + 2$
C'est aussi la division euclidienne de 50 par 8.
- Division euclidienne de (-50) par 6 : $-50 = 6 \times (-9) + 4$
Division euclidienne de (-50) par (-6) : $-50 = -6 \times 9 + 4$
- L'égalité $50 = 11 \times 3 + 17$ est vraie mais n'est pas une division euclidienne.

Remarque

Dans la division euclidienne par b , il y a $|b|$ restes possibles.

Propriété

Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Tout entier relatif a s'écrit sous l'une des formes suivantes :

$$bq \quad bq + 1 \quad bq + 2 \quad \dots \quad bq + (b - 1)$$

avec $q \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Tout entier relatif peut s'écrire sous la forme $4q$ ou $4q + 1$ ou $4q + 2$ ou $4q + 3$ avec $q \in \mathbb{Z}$.

01-02 Applications du cours**Application 1**

Division euclidienne de ...	Égalité correspondante
58 par 3	
-235 par 14	
568 par (-4)	
(-270) par (-31)	
	$79 = 6 \times 12 + 7$
990 par b ($b \in \mathbb{N}^*$)	$\dots\dots\dots = b \times 39 + \dots\dots\dots$

Application 2

Sans calculatrice, utiliser l'égalité $18\,632 = 512 \times 35 + 712$ pour écrire deux divisions euclidiennes de 18 632.

Application 3

Déterminer deux entiers naturels non nuls a et b tels que :

- La somme de a et b est 434.
- Dans la division euclidienne de a par b , le quotient est 4 et le reste est 64.

Application 4

Quels entiers naturels entre 2 000 et 3 000 ont un quotient égal au reste dans la division euclidienne par 347 ?

Application 5

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{211} par 12.
2. En utilisant l'instruction MOD() d'un tableur, déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{211} par 7.
3. Dédurre des deux questions précédentes le reste de la division euclidienne de 5^{212} par 84.

Application 6

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- a] Étudier le reste de la division euclidienne de $(2n + 2)^2$ par $(n + 2)$ en s'aidant d'un tableur.
- b] Déterminer le reste de la division euclidienne de $(4n + 7)$ par $(n + 3)$ sans l'aide d'un tableur.

Application 7

Est-il possible de trouver un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(n^2 + 1)$ soit divisible par 3 ?

Application 8

Démontrer qu'il existe un seul triplet de nombres premiers de la forme $(n ; n+2 ; n+4)$.